UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

Ejercicios sugeridos para :

los temas de las clases del 23 y 25 de junio de 2005.

Temas :
Transformaciones lineales.
Secciones 5.1, 5.2 del texto.

Observación importante:
es muy importante que Usted resuelva también muchos ejercicios del texto.

E1.- Diga, justificando, cuales de las siguientes funciones son transformaciones lineales y cuales no :
E1a) $f : R^2 \to R^2$, $f(x, y) = (2x-y, x+y)$; **E1b)** $g : R^2 \to R$, $g(x, y)= 0$;
E1c) $h : R^2 \to R$, $g(x, y)= 1$; **E1d)** $k : R^2 \to R$, $k(x, y) = sen(x+y)$;
E1e) $f : M_{2,2} \to M_{2,2}$, $f(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = (a+b)I_2$; **E1f)** $g: P_2 \to P_3$, $g(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_2x$.

E2.- Sea $V=\{(x, y, z)\in R^3 \mid x-z = 0\}$ y sea $T : R^3 \to V$ la transformación lineal definida por : $T(\mathbf{v}) = proy_V(\mathbf{v})$;
E2a) Halle una fórmula que represente $T(\mathbf{v})$ en función de las componentes de **v** ;
E2b) Halle Nc(T), Im(T) ;
E2c) Halle bases para Nc(T), Im(T) ;
E2d) Halle rango y nulidad de T.

E3.- Sean V, W espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal;
para cada una de las siguientes afirmaciones, diga, justificando, si es **cierta** o **falsa** :

E3a) $T(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_W$, siendo $\mathbf{o}_V, \mathbf{o}_W$ los vectores nulos de V, W ;

E3b) si $v \neq \mathbf{o}_V$ entonces $T(\mathbf{v}) \neq \mathbf{o}_W$;

E3c) para todo vector, $\mathbf{v} \in V$, se tiene $T(-\mathbf{v}) =-T(\mathbf{v})$ [es decir : la imagen del opuesto de un vector es la opuesta de la imagen del mismo];

E3d) si $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ es una base para V y si se conocen las imágenes $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{u}_3) = \mathbf{w}_3$ de los tres vectores de la base de V, entonces <u>T queda determinada</u> [en el sentido que existe una tal T y es única] ;

E3e) Existe y está (obligatoriamente) definida por $T(x, y) = (2x-3y, x+2y)$, una transformación lineal, $T: R^2 \to R^2$, tal que $T(1, 0)=(2, 1)$, $T(0, 1)=(-3, 2)$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

E3f) no existe ninguna transformación lineal, $T: R^2 \rightarrow R^2$, tal que
$T(1, 2)=(4, 3)$, $T(2, 0)=(4, 2)$, $T(3, 2)=(4, 5)$;

E3g) Existe una transformación lineal ,$T: R^2 \rightarrow R^2$,(y es única), tal que
$T(1, 2)=(4, 3)$, $T(2, 0)=(4, 2)$, $T(3, 2)=(8, 5)$;

E3h) el núcleo de una transformación lineal, $T : V \rightarrow W$, es subespacio vectorial del dominio, V, de la misma;

E3i) la imagen de una transformación lineal, $T : V \rightarrow W$, es subespacio vectorial del codominio, W, de la misma;

E3j) no existe ninguna transformación lineal , $T : R^2 \rightarrow R^2$, tal que
$T(1, 3)= (0, 2)$, $T(7, 20)=(3, 5)$;

E3k) La fórmula $T(\mathbf{x})= A\mathbf{x}$ (siendo A una matriz de tamaño 2x3 , $\mathbf{x}$ un vector columna de tamaño 3x1), define una transformación lineal $T : R^3 \rightarrow R^2$, cuyo núcleo es el espacio nulo de A y cuya imagen es el espacio de columnas de A.

E4) Halle la matriz asociada a cada una de las siguientes transformaciones lineales, usando las bases naturales (canónicas) en dominio y codominio.
Recuerde que en R^n la base natural es $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,..., \mathbf{e}_n)$, con $\mathbf{e}_k=(\delta_{k,1}, \delta_{k,2},..., \delta_{k,n})$
[siendo $\delta_{k,i} = 0$ si $k\neq i$, $\delta_{k,i} =\delta_{k,k} = 1$ si $k=i$] ;
por ejemplo la base natural de R^2 es ((1, 0), (0, 1)), la de R^3 es ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1));
La base natural del espacio vectorial, P_n, de los polinomios de grado $\leq n$ es $(1, x, x^2, ..., x^n)$;
La base natural del espacio vectorial, $M_{m,n}$, de todas las matrices de tamaño mxn es el conjunto de las mn matrices que tienen una componente =1 y las demás =0 ;
por ejemplo la base natural de $M_{2,3}$ es el conjunto de las siguientes seis matrices :

$$e_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ e_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ e_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ e_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ e_5=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ e_6=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

recuerde tambien que en la k-ésima columna de la matriz asociada se hallan las coordenadas de la imagen del k-ésimo vector de la base del dominio.

E4a) $T: R^2 \rightarrow P_3$, $T(a, b) = ax+(a-b)x^2+(3b-2a)x^3$;
E4b) $T : P_3 \rightarrow P_3$ $T(f)=f\,'$ (= derivada de f) ;

E4c) $T : M_{2,3} \rightarrow R^2$, $T(\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}) = (a+b-c+d, 2a+3b-4f+2e)$;
E4d) $T : M_{2,2} \rightarrow M_{2,2}$ $T(A)=A^t$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

E4e) $T : P_4 \rightarrow M_{2,2}$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4) = \begin{bmatrix} a_0+a_1 & a_2-a_3 \\ a_4+a_0 & a_2-a_4 \end{bmatrix}$;

E5.- Sea $T : P_3 \rightarrow P_2$ una transformación lineal de la cual se conoce que :
$T(1+2t-t^3)= 0$, $T(1+t^2)=t-1$, $T(3)= 3$, $T(2+t)=1-t^2$; halle :
E5a. La matriz asociada a T usando las bases naturales;
E5b. Una base para el núcleo de T y la nulidad de T;
E5c. Una base para la imagen de T y el rango de T;
E5d. Averigüe si el polinomio nulo pertenece a la imagen de T;
E5e. Averigüe si el polinomio $17-11t+3t^2$ pertenece a la imagen de T;
E5f. Halle, si posible, dos polinomios f, g en el dominio de T, que sean L.I. y no pertenezcan al nucleo de T.

R E S P U E S T A S

SE1) Son transformaciones lineales a, b, e, f ; no son transformaciones lineales c, d;
para los casos a, b, e, f hay que verificar las dos propiedades :

$T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$; $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$;

almenos una de estas dos propiedades no se cumple en los casos c, d :

SE1c) : si $\mathbf{u}=(1, 2)$, $\mathbf{v}=(-3, 0)$, $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(-2, 2)=1$; $T(\mathbf{u})=1$, $T(\mathbf{v})=1$;
$T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})=1+1=2$; $\Rightarrow$ $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})\neq T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$

SE1d) : si $\mathbf{u}=(0, \frac{\pi}{2})$, $\lambda=3$, $T(\lambda\mathbf{u})=T(3\mathbf{u}) =T(0, \frac{3\pi}{2})=\text{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1$;
$\lambda T(\mathbf{u})=3.T(\mathbf{u}) = 3.\text{sen}(\frac{\pi}{2})= 3\neq -1 \Rightarrow T(\lambda\mathbf{u})\neq\lambda T(\mathbf{u})$.

SE2) Una base para V es ((1, 0, 1), (0, 1, 0)) ; como estos dos vectores son ortogonales uno al otro, podemos obtener una base ortonormal para V dividiendo a cada uno por su módulo:
$\mathbf{u_1} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$. Entonces : si $\mathbf{v}= (x, y, z)$,

SE2a) $T(x, y, z) = \text{proy}_V(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1}+ (\mathbf{v}.\mathbf{u_2})\mathbf{u_2}= y\mathbf{u_1}+\frac{x+z}{\sqrt{2}}\mathbf{u_2} = \frac{1}{2}(x+z, 2y, x+z)$;

SE2b) $\mathbf{v}=(x, y, z)\in Nc(T) \Leftrightarrow \text{proy}_V(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \Leftrightarrow x+z=2y=0$ así que
Nc(T) es la recta representada por $x+z=2y=0$;
como $\dim(Nc(T))+\dim(Im(T))=\dim(\text{dominio}(T))=3 \Rightarrow \dim(Im(T))=2$, por lo cual
$Im(T)=V=$ plano de ecuación $x-z=0$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA1116 abril-julio de 2009**
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

SE2c) una base para V=Im(T) ya se halló en **SE2a)** ; como dim(Nc(T)=1, una base para Nc(T) se obtiene con cualquier vector no nulo de Nc(T), por ejemplo (1, 0,-1) .

SE2d) $\rho(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$; $\nu(T)=\dim(\mathrm{Nc}(T)) = 1$.

SE3) son ciertas : a, c, d, e, f, g, h, i, k; son falsas : b, j.

SE3a) $T(\mathbf{o}_V) = T(0.\mathbf{o}_V) =0.T(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_w$; también : $T(\mathbf{o}_V) = T(\mathbf{o}_V+\mathbf{o}_V) = T(\mathbf{o}_V) + T(\mathbf{o}_V)$ lo cual implica $T(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_w$;

SE3b) Esto se cumple sólo en el caso que T sea función inyectiva; consideremos entonces, por ejemplo, la transformación lineal $T : R^2 \to R^2$ definida por T(x, y) = (x-y, 3y-3x) cuyo núcleo es el subespacio de R^2 : gen{(1, 1)}. Se tiene $(1, 1)\neq(0, 0)$, T(1, 1)=(0, 0) ;

SE3c) Basta observar que $T(-\mathbf{v}) +T(\mathbf{v}) = T(-\mathbf{v}+\mathbf{v})= T(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$;

SE3d) Todo vector, $\mathbf{v}\in V$, se puede expresar en forma única como combinación lineal de los vectores de una base : $\mathbf{v}= x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{u}_3$: entonces si T es una transformacón lineal, se tiene : $T(x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{u}_3)=x_1T(\mathbf{u}_1)+x_2T(\mathbf{u}_2)+x_3T(\mathbf{u}_3) = x_1\mathbf{w}_1+x_2\mathbf{w}_2+x_3\mathbf{w}_3$; es fácil verificar que una función definida en esta manera, cumple con la definición de transformación lineal.

SE3e) T(x, y)=T(x(1, 0)+y(0, 1)) = xT(1, 0)+yT(0, 1) = x(2, 1)+y(-3, 2) =(2x-3y, x+2y) ;

SE3f) deberíamos tener :
$T(3, 2)=T((1, 2)+(2, 0))=T(1, 2)+T(2, 0)=(4, 3)+(4, 2)=(8, 5)\neq(4, 5)$;

SE3g) Si T(1, 0)=(a, c), T(0, 1)=(b, d), entonces T(x, y)=x(a, c)+y(b, d)=(ax+by, cx+dy) , luego T(1, 2)=(a+2b, c+2d)=(4, 3); T(2, 0) = (2a, 2c) = (4, 2) ,
T(3, 2)=(3a+2b, 3c+2d)=(8, 5) ; por lo tanto :

$$\begin{cases} a+2b=4 \\ 2a=4 \\ 3a+2b=8 \end{cases} , \begin{cases} c+2d=3 \\ 2c=2 \\ 3c+2d=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow \qquad T(x, y) = (2x+y, x+y) ;$$

SE3h) $T(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_W \Rightarrow \mathbf{o}_V \in \mathrm{Nc}(T) \Rightarrow \mathrm{Nc}(T)\neq\varnothing$;
$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{Nc}(T) \Rightarrow T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \Rightarrow T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \mathbf{o}+\mathbf{o} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}\in \mathrm{Nc}(T)$;
$\mathbf{u} \in \mathrm{Nc}(T), \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{o} = \mathbf{o} \Rightarrow \lambda\mathbf{u}\in \mathrm{Nc}(T)$.
SE3i) $\mathbf{o}_w= T(\mathbf{o}_V) \Rightarrow \mathbf{o}_w \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \mathrm{Im}(T)\neq\varnothing$;
$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \mathbf{w}_1= T(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{w}_2= T(\mathbf{u}_2) \Rightarrow T(\mathbf{u}_1+ \mathbf{u}_2)= T(\mathbf{u}_1)+T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}(T)$;
$\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T), \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{w}= T(\mathbf{u})$, $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{w} \Rightarrow \lambda\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SE3j) Actuando como en la solución de **SE3g)** :
Si T(1, 0)=(a, c), T(0, 1)=(b, d), entonces T(x, y)=x(a, c)+y(b, d)=(ax+by, cx+dy) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ T(1, 3)=(a+3b, c+3d) = (0, 2) , T(7, 20)=(7a+20b, 7c+20d) = (3, 5) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ a=9, b= -3, c= -25, d = 9 , por lo tanto existe una transformación lineal con las propiedades pedidas y su fórmula es : T(x, y) = (9x-3y, -25x+9y) .

SE3k) Como $T(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1+A\mathbf{x}_2 = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$;
$T(\lambda\mathbf{u}) = A\lambda\mathbf{u} = \lambda A\mathbf{u} = \lambda T(\mathbf{u})$, T es efectivamente una transformación lineal. Además :
$\mathbf{x} \in Nc(T) \Leftrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in N_A$; $\mathbf{y} \in Im(T) \Leftrightarrow \mathbf{y}=T(\mathbf{x})= A\mathbf{x}$ = combinación lineal de las columnas de A (*) $\Leftrightarrow \mathbf{y} \in C_A$.
[(*) Nota : si $\mathbf{x} = (x_1, x_2,...,x_n)^t$ y si indicamos con $\mathbf{a}_k$ el k-ésimo vector columna de A ,
entonces $A\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{a}_k = x_1\mathbf{a}_1+ x_2\mathbf{a}_2+...+ x_n\mathbf{a}_n$].

SE4a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; **SE4b)** $\begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&3 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$;

SE4c) $\begin{bmatrix} 1&1&-1&1&0&0 \\ 2&3&0&0&2&-4 \end{bmatrix}$; **SE4d)** $\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$; **SE4e)** $\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&-1&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&-1 \end{bmatrix}$.

SE5a.-Las bases naturales en P_3, P_2 , son , respectivamente : (1, t, t^2), (1, t);
De las varias imágenes de vectores que se proporcionan en el enunciado, obtenemos :
$T(1) = \frac{1}{3}T(3) = 1$, $T(t) = T(t+2) - T(2) = (1-t^2) - 2 = -t^2-1$;
$T(t^2) = T(1+t^2)-T(1) = (t-1) - 1 = t-2$;
$T(t^3) = (-1-2t+t^3) +T(1)+2T(t) = 0 + 1 +(-2t^2-2) = -2t^2-1$.
recuerde que en la k-ésima columna de la matriz asociada se hallan las coordenadas de la imagen del k-ésimo vector de la base del dominio; por lo tanto, por ejemplo, en la primera columna de la matriz asociada se hallarán las componentes 1, 0, 0 ya que $T(1)=1+0.t+0.t^2$
etc. $\Rightarrow$ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1&-1&-2&-1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&-1&0&-2 \end{bmatrix}$; observe que :

como $A\begin{bmatrix} a_o \\ a_2 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&-1&-2&-1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&-1&0&-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_o \\ a_2 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_o-a_1-2a_2-a_3 \\ a_2 \\ -a_1-2a_3 \end{bmatrix}$, se tiene, en forma no matricial :

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

$T(a_o+a_1t+a_2t^2+a_3t^3) = (a_o-a_1-2a_2-a_3)+ a_2t + (-a_1-2a_3)t^2$.

SE5b. $f(t) = a_o+a_1t + a_2t^2 +a_3t^3 \in Nu(T) \Leftrightarrow T(f)=T(a_o+a_1t + a_2t^2 +a_3t^3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_o-a_1-2a_2-a_3=0 \\ a_2=0 \\ -a_1-2a_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow (a_o, a_1, a_2, a_3)\in N_A$. Usando una vez mas entonces el algoritmo de

Gauss-Jordan : $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a_o=-a \\ a_1=-2a \\ a_2=0 \\ a_3=a \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow Nu(T)=\{-a-2at+at^3\} =gen\{t^3-2t-1\} \Rightarrow \nu(T)= 1$.

SE5c. $b_o+b_1t + b_2t^2 \in Im(T) \Leftrightarrow b_o+b_1t + b_2t^2= T(a_o+a_1t + a_2t^2 +a_3t^3)$ para almenos un polinomio, $a_o+a_1t + a_2t^2 +a_3t^3$ del dominio de T, y como
$T(a_o+a_1t+a_2t^2+a_3t^3) = (a_o-a_1-2a_2-a_3)+ a_2t + (-a_1-2a_3)t^2$, será
$b_o+b_1t + b_2t^2 \in Im(T) \Leftrightarrow$ existen números a_o, a_1, a_2, a_3 tales que
$(a_o-a_1-2a_2-a_3)+ a_2t + (-a_1-2a_3)t^2= b_o+b_1t + b_2t^2$,
cualesquiera que sean los números b_0,b_1,b_2 es decir, que debe ser consistente el sistema (en las incógnitas a_o, a_1, a_2, a_3 : $\begin{cases} a_o-a_1-2a_2-a_3=b_o \\ a_2=b_1 \\ -a_1-2a_3=b_2 \end{cases}$ cualesquiera que sean los números b_0,b_1,b_2 .

Con el algoritmo de Gauss-Jordan :

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & b_o \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & b_2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & b_o \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_1 \end{array}\right] \Rightarrow$ siempre consistente $\Rightarrow Im(T)=P_2$;

una base para P_2 es { 1, t, t^2] y $\rho(T)=3$;

E5d. El polinomio nulo pertenece a todo subespacio de P_2 y por lo tanto tambien a la imagen de T;
E5e. El polinomio $17-11t+3t^2$ pertenece a la imagen de T ya que $Im(T)=P_2$;
E5f. Dos polinomios f, g en el dominio de T, que sean L.I. y no pertenezcan al nucleo de T, pueden ser cualquier par de polinomios que no sean múltiplos de t^3-2t-1 y que no sean múltiplo uno del otro; por ejemplo f(t)= t+3, g(t) = 1+t.
Mas en general : podríamos inclusive hallar tres polinomios L.I. y no pertenecientes al nucleo de T, a saber, tres polinomios , f, g, h, cuyas imágenesT(f), T(g), T(h), fuesen L.I.